ANALISI D'OPERE

EVERT W. BETH, *Mathematical Thought. An Introduction to the philosophy of mathematics*, Dordrecht, Reidel Publishing, 1965. Un vol. di pp. XII-208.

Questo volume esce a tre anni di distanza da un altro del medesimo A., pubblicato nella stessa collana « Synthese Library », dal titolo *Formal Methods* e intende essere il complemento filosofico di quello (a carattere, invece, prettamente tecnico).

Già nel 1940 il B. aveva pubblicato una *Inleiding tot de Wijsbegeerte der Wiskunde* (Introduzione alla filosofia della matematica); le parti a carattere speculativo di quel lontano lavoro sono state ora tradotte e inserite in questa nuova opera, la quale accoglie pure parziali traduzioni e rielaborazioni di pubblicazioni successive, cosicché si può dire senz'altro che ci troviamo qui di fronte alla sintesi complessiva dei punti di vista filosofici maturati durante i lunghi anni di feconda ricerca di uno fra i maggiori logici contemporanei. Il fatto poi che il B. abbia ultimato il manoscritto di questo libro proprio poco prima della sua prematura scomparsa, a cinquantacinque anni, conferisce ai suoi pensieri anche il valore umano di un messaggio da parte di uno degli ormai sempre più rari ricercatori capaci di tener presente, accanto alle preoccupazioni tecniche delle indagini particolari, anche la componente filosofica di queste impegnative indagini.

Dopo una introduzione in cui si accennano i motivi del distacco tra filosofia e matematica prodottosi dopo Kant e si prende atto della preparazione tecnica ormai necessaria per affrontare le questioni di filosofia della matematica (conseguenza del fatto che è sul terreno matematico, in connessione con le ricerche sui « fondamenti », che si è riacceso l'interesse attorno a tali questioni), segue un capitolo in cui si esaminano le critiche mosse alla concezione della matematica come scienza basata su una forma di « intuizione » e, in particolare, si cerca di valutare in che misura le geometrie non-euclidee abbiano effettivamente il significato di una crisi dell'intuizione. L'A. ritiene che l'esistenza dei noti « modelli » delle geometrie non-euclidee provi a sufficienza che esse pure hanno accesso ad una autentica intuizione geometrica; se mai, il carattere della intuitività viene meno per altri motivi e in altre circostanze, ossia quando si affrontano i processi infiniti (poiché questi, sostiene l'A. aderendo a note tesi di G. Mannoury, sono generati da una « negazione di esclusione », la quale ha carattere emozionale e non intuitivo, a differenza della « negazione di scelta », che si esercita su un numero finito di alternative). Tenuto conto di questo, anche la tesi kantiana della fondazione della matematica sull'intuizione pura non è intaccata dalle geometrie non-euclidee; ma anche l'intuizione pura, per rimanere veramente intuizione, deve limitarsi al finito.

Il terzo capitolo è dedicato ai « Fondamenti dell'aritmetica ». Dopo aver chiarito la moderna nozione di « definizione per astrazione » e aver esposto i procedimenti di dimostrazione e definizione per ricorrenza, tipici dell'aritmetica, l'A. schizza brevemente l'impostazione assiomatica con cui Dedekind ha *caratterizzato* l'insieme dei numeri naturali e affronta poi il problema dell'esistenza di un *modello* di tali assiomi. Si apre così un discorso conciso, ma efficace, sui « numeri ordinali », che fornisce la base per la definizione dei numeri naturali come ordinali finiti e per mostrare l'esistenza — al finito — dell'equivalenza fra numero cardinale e ordinale. In tal modo risulta esposta la fondazione fregeano-cantoriana dell'aritmetica come ramo della logica (o della teoria degli insiemi).

In un volume come questo non poteva certo mancare una trattazione della nota questione dei rapporti fra logica simbolica e logica tradizionale. Conformemente a quello che è ormai il punto di vista degli studiosi più seri e informati, il B. vede una continuità fra l'impostazione logico-formale già emersa fin dall'antichità — e giunta a un livello di già notevole consapevolezza con Leibniz — e la moderna logica simbolica, la quale ha raggiunto un grado di completezza e di rigore che, per altro, mancava alla logica tradizionale. Con ciò la logica non si è tuttavia ridotta a un ramo della matematica e, in particolare, il carattere algoritmico e computistico dei calcoli logici non esime affatto dalla necessità di saper « veder dentro » le argomentazioni (come hanno provato i teoremi di « limitazione » dei formalismi). Il B. dedica anche un esame al problema dei rapporti fra logica simbolica e metafisica: riconosciuta una effettiva neutralità della prima nei confronti delle diverse metafisiche e, ancor più, l'illusorietà della pretesa dei primi neopositivisti di « liquidare » la metafisica sulla base di questa logica, il B. passa ad esporre alcuni problemi schiettamente filosofici che scaturiscono dalla logica stessa, quando si tratta di dare un significato ai suoi simboli: le varie soluzioni proposte per questo problema risultano in definitiva riformulazioni in chiave moderna del classico *problema degli universali.* Come interessante esempio della suaccennata continuità fra logica antica e nuova, l'A. presenta il suo metodo delle *tavole semantiche* per la ricerca sistematica di controesempi alla conclusione di una argomentazione, il quale soddisfa alla concezione classica secondo cui una argomentazione corretta non deve poter ammettere controesempi e, nel frattempo, permette anche di ricostruire l'effettiva deduzione formale della conclusione dalle premesse, secondo il metodo della *deduzione naturale* di Gentzen.

Il capitolo V è dedicato ad un confronto fra due classiche posizioni circa la natura del sapere matematico: l'intuizionismo e il formalismo. Preponderante è l'esposizione del primo punto di vista (che è anche quello a cui aderisce l'A. stesso). Dopo aver richiamato le idee di Brouwer a proposito dell'intuizione come sorgente dell'*attività* matematica (la quale va accuratamente distinta dalla *lingua* della medesima, ossia dal suo esprimersi in particolari teorie) e dell'indipendenza della matematica dalla logica, il B. mostra, utilizzando un esempio di Tarski, come la non contraddittorietà di un sistema di assiomi non sia condizione sufficiente per l'esistenza di un loro modello, ossia per asserire che esistono enti matematici capaci di soddisfarli, offrendo così una giustificazione dell'esigenza intuizionista di « costruire » gli enti matematici di cui si asserisce l'esistenza. Gli intuizionisti, oltre ad esprimere loro punti di vista *circa* la matematica, hanno posto mano anche alla *effettiva* costruzione di una matematica capace di tener conto delle loro esigenze, la quale ha la caratteristica di non poter essere rifiutata neppure da coloro che non aderiscono alle idee intuizioniste *circa* la matematica. Brouwer e Beth ritengono che ciò sia conseguenza del fatto che gli intuizionisti costruiscono la loro matematica senza alcun *presupposto.* Parrebbe più giusto, tuttavia, riconoscere che la ragione è forse un'altra: anche gli intuizionisti hanno i loro presupposti, se non che questi si concretano nella *limitazione* dei metodi ammessi dalla matematica classica. Ora, è ben vero che questa limitazione si esprime nell'uso di mezzi che sono, almeno formalmente, *nuovi* e che con questi mezzi gli intuizionisti hanno saputo fornire costruzioni assai originali, come una loro teoria degli insiemi e delle funzioni, in cui figurano anche alcuni risultati che non hanno il corrispettivo nella matematica classica, ma anche con ciò l'essenza della questione non cambia: è chiaro che, servendosi di strumenti più ristretti, si ottengono risultati non contestabili da parte di chi si vale di mezzi più ampi (e magari risultati di una ricchezza a tutta prima insospettata e perfino corredati di qualche particolare assolutamente tipico), ma il vero problema è quello di vedere se esiste qualcosa d'altro di accettabile, che invece tali mezzi ristretti non riescono a darci, e proprio questo accade nel caso specifico: l'edificio della matematica classica contiene troppe cose importanti che gli intuizionisti debbono sacrificare in forza di alcune limitazioni... *presupposte.* La più nota di queste limitazioni è l'interdizione di un uso *generale* del principio del terzo escluso e della dimostrazione per assurdo per provare l'*esistenza* di enti matematici: anche in questo volume l'annosa questione è ripresa, ma anche questa volta la trattazione, come sempre accade quando gli intuizionisti affrontano tale tema, risulta vaga e, quando si cerca di stringere le varie argomentazioni in un punto, ci si rende conto che la rinuncia al terzo escluso in certi casi — in cui si lavora con processi infiniti — è imposta solo perché il risultato non è intuitivo, perché l'ente di cui si asserisce l'esistenza non è « mostrato » o « costruito » effettivamente, col che ci si riduce, appunto, al *presupposto* base di tutta la tematica intuizionista. Del resto, sia Brouwer che il B. devono ammettere di non essere in grado di ridurre all'assurdo coloro che non accettano le loro limitazioni.

Più rapida è la presentazione del formalismo, ossia della posizione hilbertiana che considera la matematica come un complesso di sistemi formali puramente astratti, per i quali il vero e unico problema è quello di stabilire la non-contraddittorietà. Dopo aver prospettato la primitiva impostazione hilbertiana, che riteneva di poter soddisfare a queste dimostrazioni metateoriche di non contraddittorietà con l'uso di metodi « finitisti » (esemplificati dal B. attraverso l'esposizione della ben nota prova di coerenza del calcolo proposizionale), l'A. chiarisce che, dopo il teorema di Gödel del 1931, si è dovuto abbandonare il primitivo « programma hilbertiano » e fare posto a procedimenti assai meno restrittivi per le prove di non contraddittorietà, come quelli di Gentzen e Carnap (fedeli entrambi al punto di vista formalistico di Hilbert, ma più largo il primo e addirittura senza limitazioni il secondo riguardo all'ampiezza degli strumenti metateorici ammessi), o a quello semantico di Tarski, che abbandona tanto le restrizioni finitiste quanto l'impostazione formalista di Hilbert.

Un breve capitolo (il VI) è dedicato ai paradossi: si tratta di una presentazione dei più comuni paradossi sia di carattere « logico » che « semantico », con l'indicazione delle note vie di uscita, costituite per i primi da opportune (anche se fra loro diverse) restrizioni del « principio di comprensione » e per i secondi dalla distinzione fra livello linguistico e metalinguistico.

Pure breve è il cap. VII, in cui si confrontano due tipiche concezioni del linguaggio, ossia da un lato quella logistica, che considera il linguaggio come una costruzione in sé conchiusa e funzionante in modo indipendente rispetto ai soggetti che lo impiegano, e per la quale il problema del *significato* si esaurisce nella ricerca di corrispondenze fra segni linguistici e oggetti che possono venir con essi denotati; dall'altro lato invece la posizione « significista », che vede il significato come qualcosa di vario, mutevole, « disperso » in funzione delle diverse esperienze e dei diversi atteggiamenti psicologici degli interlocutori. Il B., che per un certo periodo di tempo aveva ritenuto che questa seconda posizione fosse in grado di portare particolari chiarimenti in tema di fondamenti della matematica, si mostra ora invece più incline a ritenere che, per *questi* problemi, la logica offra già quel tanto di chiarimento che ci si può attendere in proposito.

La parte più « nuova » di questo volume (nel senso che si tratta di pagine redatte appositamente per esso) è il lungo capitolo VIII, intitolato « Sviluppi recenti ». In esso si passano in rassegna gli indirizzi di ricerca che più hanno caratterizzato le indagini logico-matematiche dal 1950 in poi ed esso costituisce, quindi, una specie di « aggiornamento » sullo stato attuale di questi studi. Non è certo possibile riassumere il contenuto di questo capitolo, consistente già di per sé in una rassegna rapida e sommaria di cose salienti; basterà quindi elencare gli argomenti che esso tocca: nuovi metodi per la costruzione di sistemi logici; metalogica elementare; teoria della definizione, teoria dei modelli, metalogica non-elementare; logica algebrica; aritmetica ricorsiva; analisi ricorsiva; aritmetica operativa; analisi operativa; logica e matematica intuizioniste; teoria della ricorsività; decidibilità e indecidibilità; classi iperaritmetiche; analisi computabile; teoria assiomatica degli insiemi; reinterpretazione nominalistica di nozioni insiemistiche. I vari e numerosi argomenti sono toccati con ampiezza di sviluppo molto ineguale: in genere si può rilevare che una relativa diffusione si riscontra a proposito delle elaborazioni di tipo operativo e costruttivo, mentre pochi cenni sono riservati ad altre impostazioni. Ciò per un verso rientra nell'economia generale del volume, in quanto i metodi del primo tipo sono i più prossimi alle idee dell'A. in fatto di logica e metodologia della matematica ma, d'altro canto, ne risulta una certa alterazione di prospettiva circa l'effettivo peso che i diversi indirizzi di ricerca hanno oggi in seno agli studi logico-matematici. A parte questo, si può anche osservare che questa vasta rassegna non riesce del tutto convincente quanto alla sua vera utilità: da un canto, infatti, essa risulta probabilmente troppo sommaria e troppo difficile per un lettore non specificamente preparato e che aspiri soltanto ad una buona « informazione » (la chiarezza e l'essenzialità d'esposizione non sono mai state fra le doti più spiccate di questo studioso dall'immensa cultura), mentre d'altro canto le indicazioni che essa offre sono ancora troppo vaghe per chi desideri attingervi con proposito di « studio » e vi cerchi orientamenti precisi per ulteriori approfondimenti tecnici.

L'ultimo capitolo (il IX) è dedicato ad una specie di bilancio filosofico delle varie correnti di pensiero matematico presentate: il B. non ci offre una sua ben definita visione di filosofia della matematica, dichiarandosi pago di riuscire piuttosto a esporre i motivi di accettabilità e le difficoltà dei diversi indirizzi presentati e di chiarire alcuni punti di vista più generali, di carattere metafisico-ontologico, in essi impliciti (anche se gran parte dell'effettivo sviluppo delle ricerche sui fondamenti risulta poi indipendente dalle posizioni filosofiche sottintese).

Dopo aver rifiutato la soluzione convenzionalista del neopositivismo in tema di logica e matematica, egli si dice sufficientemente vicino, più che alla concezione « platonistica » di Frege, Whitehead, Scholz, a quella di « realismo moderato » professata da Bernays e Gonseth — la quale considera oggetto della ricerca logica e della speculazione matematica certe entità ideali che risultano da una astrazione dalla realtà sensibile — pur con certi elementi di dissenso. Nonostante la suddetta concezione presenti punti di contatto evidentissimi con ben note prospettive aristotelico-scolastiche, il B. ritiene che si tratti, nella sostanza, di pure coincidenze di fatto e fonda questa sua persuasione su una disamina critica di una terna di articoli del tomista P. Hoenen, dedicati ai fondamenti della geometria. A proposito di tale analisi critica si può certo osservare che, nonostante l'autorevolezza del P. Hoenen (la quale per altro ci pare più precisabile nell'ambito delle scienze fisiche che in quello delle matematiche), è un po' eccessivo concentrare il nocciolo delle concezioni scolastiche sul tema dei fondamenti della matematica in quegli articoli (apparsi, per di più, prima del 1940). In essi, indubbiamente, traspare un certo eccesso di schematicità e non appaiono valutati in tutta la loro portata i risultati delle moderne ricerche sui fondamenti; ma bisogna anche dire che lo stesso B. non ha saputo cogliere adeguatamente la ricchezza e la duttilità di significati che si celano sotto certe nozioni e locuzioni troppo rigidamente impiegate, forse, dal suo interlocutore, ma ricche, tuttavia, di un contenuto storicamente accertabile ben più ricco e adeguato. Ciò gli avrebbe permesso anche di non stupirsi di tante coincidenze che, nonostante tutto, egli riscontra fra talune fondamentali asserzioni dell'Hoenen e le idee cui egli stesso aderisce. Ad ogni modo, è indubbio che l'impianto generale delle concezioni dell'A. circa la natura della matematica può avere, in definitiva, punti di contatto sostanzialmente estrinseci, anche se numerosi, sia con le dottrine scolastiche che con quelle di Bernays e Gonseth. Egli infatti aderisce, praticamente senza riserve, alle tesi intuizioniste di Brouwer, il quale pure riconosce l'oggetto della conoscenza matematica in una *astrazione*, non già però rispetto all'esperienza del mondo sensibile, ma rispetto ad un'esperienza interiore costituita dalla presa di coscienza del trascorrere del tempo, scandita nella *dicotomia* dell'esser consapevoli e del « silenzio » di consapevolezza. Il B. stesso ha cercato a suo tempo di recare il contributo di una analisi psicologica introspettiva più approfondita a sostegno di queste idee di Brouwer, mirando a giustificare anche la natura « creativa » del pensiero matematico sulla base della possibile volontarietà della transizione dalla condizione di « silenzio » a quella di « attenzione causale » negli stati di coscienza. Pare tuttavia di dover riconoscere che neppure questi chiarimenti di B. riescano a portare molta luce sulla ben nota nebulosità di queste vedute degli intuizionisti.

L'esposizione abbastanza dettagliata che è stata condotta fin qui dei contenuti di questo volume può già da sola costituire il migliore implicito apprezzamento positivo a suo riguardo. Si tratta, in primo luogo, di una lettura *utile*, nel senso che uno studioso ne può sempre ricavare qualcosa: può trarne parecchie informazioni se sta muovendo i primi passi nell'ambito del pensiero logico-matematico; può trarne utili spunti di riflessione e alcuni motivi di approfondimento anche se ha già alle sue spalle una più vasta cultura logico-matematica. Ciò è conseguenza del fatto, già ricordato, che quest'opera è stata scritta da uno studioso la cui più saliente caratteristica è proprio la ricchezza e varietà della cultura. Per la verità, si sarebbe desiderata una maggiore organicità e sinteticità in questo lavoro, le cui parti risultano in definitiva giustapposte e al massimo « saldate », ma non mai veramente fuse in unità di discorso continuativo: è noto tuttavia che la capacità di sintesi e la chiarezza espositiva sono sempre stati un poco i punti deboli anche nelle precedenti opere del B., e questa non fa eccezione. Si tratta comunque di difetti che non intaccano la sostanza di quanto è detto, ma solo la sua *efficacia* e ne rendono più faticosa l'utilizzazione da parte del lettore.

Una certa misura di delusione, invece, deve registrare colui che si accinga alla lettura di questo libro col desiderio di trovarvi, finalmente, una definita posizione del B. in tema di filosofia della matematica: quella posizione filosofica sempre vagamente sottintesa, parzialmente accennata e continuamente « rimandata » nelle pur impegnative opere precedenti. Anche qui, viceversa, il B. manca all'appuntamento e si può dire che egli non sia mai più riuscito a guarire da quel sostanziale scetticismo filosofico, subentrato in lui dopo la crisi delle posizioni neo-kantiane alle quali aveva aderito negli anni della giovinezza. Dopo aver oscillato, senza mai aderire completamente né all'uno né all'altro, tra l'intuizionismo brouweriano e il significismo mannouryano, pareva negli ultimi anni che il B. si orientasse verso una certa forma di realismo — che sta riscuotendo un interesse sempre più deciso presso i logici matematici — e che vi dovesse assumere una posizione originale, ma questo itinerario si direbbe si sia per lui praticamente concluso con un ritorno a Brouwer, sia pure accompagnato da certe prudenze, le quali non sono suggerite tanto da perplessità circa la bontà delle tesi intuizioniste, quanto piuttosto da una più generica preoccupazione di non « chiudere » verso altre prospettive e di non negare una possibile *sensatezza* anche ad altri tipi di discorso. Questo infatti è l'esplicito atteggiamento da lui assunto sia all'apertura, sia nelle ultime frasi con cui si chiude il volume. E' forse un atteggiamento deprecabile? Certamente no: anche se in noi era presente un legittimo desiderio di conoscere un punto di vista precisato e abbastanza conclusivo sulla natura del pensiero matematico da parte di uno studioso tanto considerevole, non si può fare a meno di apprezzare l'onestà intellettuale e l'estrema serietà con cui egli si è astenuto una volta ancora dal formulare delle conclusioni che non riteneva ancora acquisite, lasciandoci il rimpianto che la morte prematura non gli abbia consentito di condurre in porto le sue tanto scrupolose e impegnate riflessioni.

EVANDRO AGAZZI

MAX POHLENZ, *La libertà greca*, Traduzione italiana di Maria BELLINCIONI; Premessa di Italo LENA, Brescia, Paideia, 1963. Un vol. di pp. XX-277.

Il volume non nasce da esigenze di pura ricerca erudita, ma dal bisogno di trovare una chiarificazione storica e teoretica al problema della libertà intesa non solamente in senso individuale e personale, ma anche in senso collettivo, abbracciante ad un tempo il rapporto tra il cittadino e lo stato, fra il cittadino e la società, fra l'uomo e la società metafisica. Un intreccio di temi e rapporti che il concetto di libertà racchiude in sé.